

Théorie spectrale du Laplacien

1 Notations et rappels

Sur $L^2(\mathbb{T}^d)$ (ou $L^2(\mathbb{R}^d)$), on définit l'opérateur Laplacien $A_0 = -\sum_{i=1}^d \partial_i^2$ avec pour domaine l'ensemble $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ (resp. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$) des fonctions lisses (resp. lisses à support compact).

Si (M, g) est une variété riemannienne, on peut de même définir sur $L^2(M)$ un opérateur non borné, dit de Laplace-Beltrami, par $A_0 = -\operatorname{div}_g \circ \nabla^g$ avec pour domaine $D(A_0) = C_c^\infty(M)$ (dense dans $L^2(M)$). En coordonnées, on a $A_0 u = -(\det g)^{-1/2} \partial_i (g^{ij} (\det g)^{1/2} \partial_j u)$ pour $u \in D(A_0)$.

Lemme 1. $(A_0, D(A_0))$ est symétrique et $A_0 \geq 0$, c'est-à-dire que pour tout $u \in D(A_0)$, on a

$$\langle u, A_0 u \rangle = \int_M |\nabla u|^2.$$

Démonstration. On rappelle la formule de Green : pour tout $X \in C_c^1(M)$,

$$\int_M \operatorname{div}(X) = 0.$$

On applique cette formule à $X = u \nabla v - v \nabla u$ puis à $X = u \nabla u$ pour $u, v \in C_c^\infty(M)$. □

2 Extensions et auto-adjonction

Dans cette section, on considère $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert et un opérateur $(T, D(T))$. On suppose que T est symétrique. T a alors deux extensions naturelles : sa fermeture $\bar{T}$ et son adjoint T^* qui vérifient les inclusions suivantes

$$T \subset \bar{T} \subset T^*$$

ainsi que $(T^*)^* = \bar{T}$, $(\bar{T})^* = T^*$. Pour rappel

$$\begin{aligned} D(\bar{T}) &= \{u \in \mathfrak{H} \mid \exists (u_n) \subset D(T), \exists f \in \mathfrak{H}, (u_n, Tu_n) \rightarrow (u, f)\} \\ D(T^*) &= \{u \in \mathfrak{H} \mid \langle u, A \cdot \rangle \in \mathfrak{H}'\} \end{aligned}$$

(a priori, on a seulement $\langle u, A \cdot \rangle \in D(A)'$).

Exemple 2. $D(A_0^*) := \{u \in L^2(M) \mid \Delta u \in L^2(M)\}$

$$\begin{aligned} D(\bar{A}_0) &= \{u \in L^2(M) \mid \exists (u_n) \subset C_c^\infty(M), \exists f \in L^2(M), (u_n, \Delta u_n) \rightarrow (u, f)\} \\ &= \{u \in D(A_0^*) \mid \exists (u_n) \subset C_c^\infty(M), (u_n, \Delta u_n) \rightarrow (u, \Delta u)\} \end{aligned}$$

Lemme 3. Si S est une extension auto-adjointe de T alors

$$\bar{T} \subset S \subset T^*$$

Autrement dit, pour trouver une extension auto-adjointe de T , il faut regarder quelque part entre $\bar{T}$ et T^* . La tendance générale est la suivante : les extensions proches de $\bar{T}$ n'ont pas un spectre inclus dans $\mathbb{R}$ et les opérateurs proches de T^* ne sont pas symétriques.

Exemple 4. Considérons $Tu = -u''$ pour $u \in D(T) = \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)$. Notons que pour tout $u, v \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$

$$\langle u'', v \rangle - \langle u, v'' \rangle = [\bar{u}'v - \bar{u}v']_0^1$$

Cette identité montre que $\mathcal{C}^\infty([0, 1]) \subset D(T^*)$. T^* n'est donc pas symétrique. Par ailleurs les éléments $D(\bar{T}) \cap \mathcal{C}^\infty([0, 1])$ s'annulent ainsi que leur dérivée en 0 et 1. En particulier, $\bar{T} + \lambda$ n'est surjective pour aucun $\lambda \in \mathbb{C}$.

Évidemment, la situation est beaucoup plus simple dans le cas suivant:

Définition 5. On dit que T est essentiellement auto-adjoint si $\bar{T}$ est auto-adjoint. C'est équivalent à dire que $T^* = \bar{T}$.

Proposition 6. T est essentiellement auto-adjoint ssi $\text{Im}(T \pm i)$ est dense.

Exemple 7. $A_0 = \Delta$ sur $D(A_0) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$ est essentiellement auto-adjoint. On le montre en résolvant l'équation $\Delta u \pm iu = f$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$. On le montre en passant par la décomposition en série de Fourier : u est donnée par

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2 \pm i} e^{i\xi \cdot x}.$$

Remarque 8. On montrera plus tard que si M est une variété fermée, $(A_0, D(A_0))$ est essentiellement auto-adjoint. On a vu que dans le cas où $M =]0, 1[$, c'est très faux. Par exemple, si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $x \mapsto e^{\sqrt{-\alpha}x}$ est dans $\text{Im}(A_0 - \bar{\alpha})^\perp = \ker(A_0^* - \alpha)$.

Calculer $\text{Im}(T \pm i)$ (dans notre cas, résoudre des EDP) ce n'est pas forcément très facile. Si T n'est pas essentiellement auto-adjoint, il pourrait y avoir plusieurs extensions auto-adjointes (cf. Laplacien sur $]0, 1[$). Dans ce cas, laquelle choisir ? On serait bien contents d'avoir un théorème abstrait qui nous en fournisse une sympathique. C'est ce que donne le résultat suivant.

Théorème 9. (Riesz-Friedrichs) Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathfrak{H}$ deux espaces de Hilbert. On suppose que $\mathcal{Q}$ s'injecte continuellement dans $\mathfrak{H}$ et que $\mathcal{Q}$ est dense dans $\mathfrak{H}$. Alors il existe un opérateur $(T, D(T))$ sur $\mathfrak{H}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i. $D(T) \subset \mathcal{Q}$,
- ii. $\forall q \in \mathcal{Q}, \forall u \in D(T), \langle u, q \rangle_{\mathcal{Q}} = \langle Tu, q \rangle_{\mathfrak{H}}$,
- iii. $D(T)$ est dense dans $\mathcal{Q}$,
- iv. T est auto-adjoint,
- v. si $(S, D(S))$ vérifie i. et ii. alors $S \subset T$.

Démonstration. On définit naturellement $(T, D(T))$ de la façon suivante : d'abord on pose

$$D(T) = \{u \in \mathcal{Q}, \langle u, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}} \in \mathfrak{H}'\}.$$

Par le lemme de représentation de Riesz, si $u \in D(T)$, il existe un unique $h \in \mathfrak{H}$ tel que

$$\langle u, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}} = \langle h, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}.$$

On pose alors $Tu := h$. Il est alors clair que T est symétrique (c'est le cas du produit scalaire de $\mathcal{Q}$) et vérifie *i.* et *ii.* par construction.

Fait : $0 \notin \text{Sp}(T)$.

Nous allons déduire tout le reste de ce fait.

iii. Si $q \in \mathcal{Q}$ est orthogonal (dans $\mathcal{Q}$) à $D(T)$, alors puisque $T^{-1}q \in D(A)$,

$$0 = \langle T^{-1}q, q \rangle_{\mathcal{Q}} = \langle TT^{-1}q, q \rangle_{\mathfrak{H}} = |q|_{\mathfrak{H}}^2$$

donc $q=0$. Cela prouve la densité de $D(T)$ dans $\mathcal{Q}$ (donc aussi dans $\mathfrak{H}$ car $\mathcal{Q}$ est dense dans $\mathfrak{H}$).

iv. Soit $u \in D(A^*)$. Il existe $v \in D(T)$ tel que $T^*u = Tv$. On en déduit que $u - v \in \ker T^* = (\text{Im } T)^\perp = \{0\}$.

v. Soit $(S, D(S))$ vérifie *i.* et *iii.* Pour tout $u \in D(S), v \in D(T)$,

$$\begin{aligned} \langle v, T^{-1}Su \rangle_{\mathcal{Q}} &= \langle Tv, T^{-1}Su \rangle_{\mathfrak{H}} \\ &= \langle v, TT^{-1}Su \rangle_{\mathfrak{H}} \\ &= \langle v, Su \rangle_{\mathfrak{H}} \\ &= \langle v, u \rangle_{\mathcal{Q}} \end{aligned}$$

Puisque $D(T)$ est dense dans $\mathcal{Q}$, $T^{-1}Su = u$. On vient de prouver que $T^{-1}S = \text{Id}_{D(S)}$ ce qui implique que $S \subset T$.

Démonstration du fait : Si $u \in \ker T$, $0 = \langle Tu, u \rangle_{\mathfrak{H}} = |u|_{\mathcal{Q}}^2$ donc $u=0$ et T est injectif. Soit $h \in \mathfrak{H}$. Sachant $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathfrak{H}$, $\langle h, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}} \in \mathcal{Q}'$ donc il existe un (unique) $u \in \mathcal{Q}$ tel que

$$\forall q \in \mathcal{Q}, \langle h, q \rangle_{\mathfrak{H}} = \langle u, q \rangle_{\mathcal{Q}}.$$

Par définition, $u \in D(T)$ et $Tu = h$. Cela donne la surjectivité. Enfin, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|u|_{\mathcal{Q}}^2 = \langle Tu, u \rangle_{\mathfrak{H}} \leq |Tu|_{\mathfrak{H}} |u|_{\mathfrak{H}}.$$

Puisque $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathfrak{H}$, il existe $C > 0$ tel que $|u|_{\mathfrak{H}}^2 \leq C|u|_{\mathcal{Q}}^2$. On conclut $|Tu|_{\mathfrak{H}} \geq |u|_{\mathfrak{H}}/C$ ce qui implique la continuité de T^{-1} . $\square$

Remarque 10.

- Il faut voir la condition *v.* comme une propriété d'unicité très forte : T est l'opérateur maximal vérifiant *i.* et *ii.*
- On a automatiquement $\text{Sp}(T) \subset [\varepsilon, +\infty[$, où $\varepsilon = \inf_{u \in \mathcal{Q} \setminus \{0\}} \frac{|u|_{\mathcal{Q}}^2}{|u|_{\mathfrak{H}}^2}$.
- Si l'injection $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathfrak{H}$ est compacte, A est à résolvante compacte.

3 Application : Laplacien sur les variétés fermées

Dans cette section (M, g) est une variété riemannienne fermée.

Définition 11. Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit $\|u\|_{H^1}$ par

$$\|u\|_{H^1}^2 = \langle (A_0 + 1)u, u \rangle = \int_M |\nabla u|^2 + |u|^2.$$

On note $H^1(M)$ le sous-espace de $L^2(M)$ obtenu par complétion de $\mathcal{C}^\infty(M)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

Théorème 12. Il existe une unique extension auto-adjointe $(A, D(A))$ de A_0 telle que $D(A) \subset H^1(M)$.

Démonstration. On note T l'opérateur donné par le théorème de Lax-Frierichs à $(\mathfrak{H}, \mathcal{Q}) = (L^2(M), H^1(M))$, et $A = T - 1$. Soit $(B, D(B))$ une extension symétrique de A_0 telle que $D(B) \subset H^1(M)$. Alors pour tout $u \in D(B)$, $v \in D(A_0)$,

$$\langle (B + 1)u, v \rangle_{L^2} = \langle u, (B + 1)v \rangle_{L^2} = \langle u, (A_0 + 1)v \rangle_{L^2} = \langle u, v \rangle_{H^1}$$

et par densité de $D(A_0)$ dans $H^1(M)$, l'égalité précédente est encore vraie pour $v \in H^1(M)$. Cela montre que $B + 1$ satisfait les hypothèses *i.* et *iii.* du théorème et donc $B + 1 \subset T$ soit encore $B \subset A$. On obtient par conséquent $A_0 \subset A$ ($B = A_0$) ainsi que l'unicité: si B est en plus auto-adjoint, comme $B \subset A$, on a $A = A^* \subset B^* = B$. $\square$

Corollaire 13. A_0 est essentiellement auto-adjoint et $\overline{A_0} = A_0^* = A$.

Démonstration. On a $\overline{A_0} \subset A \subset A_0^*$. Si on montre $A_0^* \subset A$, alors $A = A^* \subset (A_0^*)^* = \overline{A_0}$ et on conclut $A = \overline{A_0} = A_0^*$. Le seul point non trivial est l'inclusion $D(A_0^*) \subset H^1(M)$, autrement dit le fait qu'une fonction $L^2(M)$ dont le Laplacien (distributionnel) soit dans $L^2(M)$ est automatiquement dans $H^1(M)$. Un tel résultat est vrai et découle de l'ellipticité du Laplacien (c'est le premier/seul résultat purement EDP dont on a besoin pour arriver jusqu'ici !) $\square$

Remarque 14. Le théorème de Rellich-Kondrachov établit la compacité de l'injection

$$H^1(M) \hookrightarrow L^2(M)$$

pour M compacte. D'après la remarque 10, A est à résolvante compacte et les résultats de théorie spectrale pour les opérateurs auto-adjoints compacts s'applique à $(A + 1)^{-1}$. En particulier, il existe une base orthonormée de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du Laplacien. Les résultats de régularités elliptiques permettent de situer ces fonctions propres dans $D(A_0)$.

4 Extension au cas des variétés non-compactes

Dans cette section (M, g) est une variété riemannienne quelconque.

Définition 15. Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit $\|u\|_{H^1}$ par

$$\|u\|_{H^1}^2 = \langle (A_0 + 1)u, u \rangle = \int_M |\nabla u|^2 + |u|^2 \in [0, +\infty]$$

et

$$\begin{aligned} H^1(M) &= \overline{\{u \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid \|u\|_{H^1} < +\infty\}}^{\|\cdot\|_{H^1}} \\ H_0^1(M) &= \overline{\mathcal{C}_c^\infty(M)}^{\|\cdot\|_{H^1}} \end{aligned}$$

On note $H^1(M)$ le sous-espace de $L^2(M)$ obtenu par complétion de $C^\infty(M)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$.

On peut appliquer le théorème de Lax-Friedrichs avec $H_0^1(M)$ ou $H^1(M)$. En général, les résultats obtenus seront très différents.

Exemple 16. Dans le cas où M est un ouvert borné (régulier) de $\mathbb{R}^d$, les fonctions lisses contenues dans le domaine des ces opérateurs vérifient respectivement les conditions au bord de Dirichlet et de Neumann.

Un cas intéressant est le suivant :

Théorème 17. (Aubin) Si (M, g) est une variété riemannienne complète, $H_0^1(M) = H^1(M)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que toute fonction $f \in C^\infty(M) \cap H^1(M)$ peut-être approchée dans $H^1(M)$ par des fonctions à support compact. Pour cela considérer $f_n = \chi_n f$ où par exemple

$$\chi_n = \chi(\text{dist}(p, \cdot)/n)$$

pour un point $p \in M$ arbitraire et une fonction $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0. □

Exemple 18. $M = \mathbb{R}^d$ ou $M = \mathbb{H}^d$ (ou plus généralement si M est homogène).

Dans ce cas, le théorème de Friedrichs fournit un Laplacien « canonique ».